Az alábbi írás a Ruzsa Imre emlékkonferencián, 2009. szeptember 18.-án elhangzott előadásom szövege.

Ezt a cikket 2010. január 4.-én küldtem Mekis Péter körlevelére válaszul, melyben felkéri az előadókat, köztük engem is, hogy küldjék be előadásuk szöveges változatát abból a célból, hogy a konferencia szervező bizottsága azokat a Világosság c. folyóirat különszámában megjelentesse. A beküldött cikket 2010.07.20.-án kelt emailjében Máté András, mint a Világosság e témában egy személyben felelős szerkesztője, elutasította.

A konferencia honlapján az absztrakt: http://phil.elte.hu/ruzsaconf/pdf/34%20geier.pdf

A beküldött absztraktban megadtam néhány hivatkozást is, de ez érthető okokból a konferencia honlapjáról lemaradt.

Pótolom az egyiket: http://www.geier.hu/Cantor/Cantor_rovid.htm

A szervezők ennek ismeretében fogadták be az előadásomat.

A beküldött cikk:

Szemantikai értékrés Cantor édenkertjének égboltján –
avagy mi az, amit megmentett Hilbert?
Geier János
2010. január 4

Mottó: Az élet egy játék.
Az első játékszabály: komolyan kell venni.
Paul Watzlawick

Bevezetés

A halmazelmélet axiomatizálásának vezéralakja Hilbert volt. Ruzsa [1, p176] szerint "Hilbert semmiképp sem akart lemondani Cantor transzfinit matematikájáról....". Másutt Ruzsa [1, p183] ezt írja: "A halmazelmélet axiomatizálásának természetes célja, hogy az antinómiák kiküszöbölése mellett a naiv halmazelmélet értékes részéből minél többet megmentsen.".

Az "értékes rész" nem más, mint a Cantor-féle átlós eljárás (diagonalizáció) és az azon alapuló hatványhalmaz tétel. Megmenteni csak azt lehet, ami előtte már létezett, így jogosan vethető fel a kérdés: az ún. "naiv halmazelmélet" keretein belül hibátlan-e a Cantor féle hatványhalmaz tétel bizonyítása? Itt arra a gondolatmenetre utalok, e témával foglalkozó tankönyvben megtalálhatunk, például Ruzsa [1, p147], és amely tartalmilag azonos Cantor eredeti gondolatmenetével.

Előadásomban virtuális időutazásra invitálok az 1890-es évekbe, amikor megjelentek a halmazelméleti antinómiák éppen a nevezett gondolatmenet parafrázisaiként, és még nem volt se Zermelo-Fraenkel féle, se egyéb halmazelméleti axiómarendszer, de volt egy egységes konszenzus arról, amit a magam részéről szeretnék így nevezni: Természetes Matematikai Gondolkodásmód. Ennek fényében kimutatni szándékozom: a Cantor hatványhalmaz tétel bizonyításának tankönyvi, "naiv" gondolatmenete hibás, mert az indirekt levezetésnek egy adott pontján nem veszi figyelembe az ott fellépő *szemantikai értékrést*.

Mindennek egyenes következménye, hogy Hilbert nem mentett meg semmit, mert nem volt mit megmentenie. Ellenben Zermeloval, Fraenkellel és másokkal együtt, " ..egy új, más világot teremtett". Tette ezt talán azért, mert "*Szerinte az olyan ideális matematikai elemek bevezetése, mint a végtelen halmazoké, a teremtő matematikai gondolkodás dicsősége. …*" Ruzsa [1, p176]

A Cantor féle halmazelmélettel szembeni kritikák

A halmazelmélet megalkotója Georg Cantor (1845 – 1918) Munkásságának főbb állomásai: 1874 az első halmazelméleti cikk, 1884 jórészt elfordul a matematikától, utolsó cikkei: 1895, 1897.

Cantort kezdettől fogva erős kritika érte. Először tanárától Leopold Kroneckertől (1823 – 1891) aki akadályozta cikkeinek megjelenését (úgy gondolta, hogy amit Cantor tesz, az minden, csak nem matematika: talán filozófia vagy teológia), majd Henrti Poencare (1854 – 1912) egyenesen „az ifjúság megrontójának" nevezte.

Ruzsa [1, p. 176] szerint „A XIX sz. végén, XX. század elején megjelentek az antinómiák". Cesare Burali-Forti (1961 – 1931) antinomiája 1897-ben jelent meg, Bertrand Russell (1872 – 1970) antinómiája 1902-ben, később (1919) Russell kitalálta a népszerű „borbély" antinómiát. Sok egyéb antinómia is ismert.

Az antinómiák megjelenése is a Cantor elmélet kritikája.

Az idézett műből áttekintést nyerhetünk az antinómiák feloldására kialakult három fő irányzatról:

- Intuicionizmis (Brower)
- Logicizmus (Russell- Whitehead)
- Formalizmus (Hilbert, Zermelo Franekel stb.)

Első kettő tagadta a végleten halmazok számosságának hierarchiáját, és így a Cantor elmélet egészét is.

A világ egyetemein végül a hilberti irányzat hódított tért. Ez bekerült az egyetemi tananyagokba, és tovább fejlődött a maga belső logikája szerint. Napjainkban a matematika „kötelező" szemléletmódja a halmazelméleti megalapozottság, ami már bevonult a középiskolába, az általános iskolába.

Az antinómiák azonban nemcsak úgy „megjelentek": alkotás nincs motiváció nélkül. Mi motiválhatta Russellt, és másokat, az antinómiák megalkotásakor? A Russell antinómia gondolatmenete a Cantor hatványhalmaz tétel bizonyításának gondolatmenetével azonos. Ruzsa [1]- ből megtudhatjuk, hogy Russellék logikai hibának tartották a Cantor féle diagonalizációs eljárást, az abban rejlő erős önhivatkozás miatt. Értelmezésem szerint Russell az antinómiáit a Cantor hatványhalmaz tétel paródiájának szánhatta.

A kérdés így is feltehető: hogyan lehetséges az, hogy ugyanaz a módszer egyszer antinómiához vezet, másszor tételbizonyításhoz. Tudva azt, hogy az antinómiáknak megvan a maguk „hivatalos" feloldása, mégis többen megkérdezik: nem lehet, hogy maga a „diagoinalizáció" a fő hibaok? Ezt azonban csak kevesen és kissé félve kérdezik. Ha ugyanis a diagonalizációt tartanánk hibásnak, dőlne az egész cantori elmélet. Napjainkban világszinten erős nyomás van a cantori elmélet megtartására, melynek pszichológiai és egzisztenciális okai nyilvánvalók.

Ezzel kapcsolatban figyelemre méltó Hilbert [5, p.191] mondata, melyet 1926 –ban írt le „*Senki sem fog minket kizavarni abból az édenkertből, melyet Cantor teremtett számunkra.*" E kijelentés a halmazelméleti antinómiák megjelenése, és a nevezetes 1900. évi hilberti program kihirdetése után *negyed századdal* történt. Elgondolkoztató a nagy idői eltérés. Ez a mondat cseppet sem matematikai állítás, sokkal inkább egy zászlóra tűzött jelmondat. Eszerint a matematika mégsem annyira objektív, mit hisszük? Talán a matematika fejlődési irányába személyes ambíciók is jelentősen bele tudnak szólni?

További érdekesség Wittgenstein [6] válasza Hilbert idézett mondatára: „*Ha valaki ezt a matematikusok édenkertjének tekinti, más miért ne tekinthetné viccnek*?"

Végül hadd idézzem Neumann Jánost [4, p 92-93]. (Aláhúzások és zárójeles megjegyzések tőlem.)

A tizenkilencedik század végén és a huszadik század elején az absztrakt matematika egy új ága, G. Cantor halmazelmélete nehézségekbe ütközött. Azaz bizonyos gondolatmenetek (=pl. Russell antinómia) *ellentmondáshoz vezettek; s bár ezek a gondolatmenetek nem tartoznak a halmazelmélet központi és "hasznos" részéhez, és mindig könnyen megmagyarázhatók voltak* <u>*bizonyos formális kritériumokkal*</u> (=Zermelo Fraenkel ax.) *, mégsem volt világos, miért kell őket kevésbé halmazelméletinek minősíteni, mint az elmélet "sikeres"* (=Cantor hatványhalmaz tétele) *részét. Eltekintve attól az ex post belátástól, hogy ténylegesen balsikerhez vezettek, nem volt érthető, hogy miféle a priori indok, a helyzetnek miféle konzisztens filozófiája* <u>*engedheti meg valakinek*</u>*, hogy elválassza ezeket a gondolatokat a halmazelmélet azon részétől,* <u>*amelyeket meg óhajt menteni*</u>*.*

A Cantor féle halmazelmélettel szemben ma is sok, képzett és elismert matematikus érvel. Egyik képviselőjük Alexander Zenkin [7].

A Természetes Matematikai Gondolkodásmód három alapvető szabálya

Egy matematikai tétel megfogalmazása általában áll néhány premisszából és egy konklúzióból. (Az explicit premissza nélküli tételek, pl. „nincs legnagyobb prímszám”, most irrelevánsak.)

Három alapszabályt emelek itt ki, melyeket direkt és indirekt levezetések során egyaránt figyelembe kell venni:

(i) *feltételes igazság szabálya:* direkt bizonyításnál a premisszákat, indirekt bizonyításnál a premisszákat és a bizonyítandó tétel konklúziójának tagadását *feltételesen* igaznak vesszük. *Úgy teszünk*, *mintha* igazak lennének, és ezt nem kérdőjelezzük meg mindaddig, amíg a bizonyítás végére nem értünk, az általános igazságokon (axiómákon) túl ezekre és csak ezekre támaszkodunk. Direkt bizonyításnak akkor van vége, amikor elértük a konklúziót. Indirekt bizonyításnak akkor van vége, amikor kimutattuk az ellentmondást, abszurdumot.

(ii) *sorrendiségi szabály*: egy levezetés egymást követő lépései során mindig csak korábbi állításokra támaszkodva szabad indokolni az éppen soron következő állítást és csak korábbi fogalmakra alapozva szabad elvégezni a soron következő definíciót;

(iii) *korlátozási szabály*: a levezetés minden lépésénél *kötelező* figyelembe venni az esetleges olyan korlátozásokat, melyek a feltételekből önállóan, az adott bizonyítás folytatásától független gondolatmenettel levezethetők. (Triviális példa: ha a feltételek között az van, hogy a=b+c, akkor semelyik lépésben nem szabad (a-b-c) -vel osztani, indirekt bizonyításnál sem.)

Itt jegyzem meg, hogy az indirekt bizonyítás végén kimondott állítás egy metaállítás, ellentétben a direkt bizonyítással, amikor is végig belső állítások szerepelnek a levezetés során. Eme „gyengéje” ellenére a magam részéről elfogadom az indirekt bizonyítás sémáját.

A továbbiakban azt fogom kimutatni, hogy a Cantor hatványhalmaz tétel közismert tankönyvi levezetéseinek gondolatmenete megsérti a (iii) szabályt.

A Cantor hatványhalmaz tétel bizonyítása a jól ismert tankönyvi verziók szerint

Tétel_1 (Cantor hatványhalmaz tétele) Tetszőleges nemüres M halmaz nem ekvivalens a $H=2^M$ hatványhalmazával.

Bizonyítás Tegyük fel indirekte, hogy M ekvivalens H-val, azaz, hogy

(1) létezik **B**: $M \rightarrow H$ bijektív leképezés.

Tekintsük a H hatványhalmaznak azt a T elemét, melynek pontosan azok az M halmazbeli *x* elemek elemei, melyekhez rendelt **B**(*x*) halmaz nem tartalmazza elemként *x*-et, azaz $T \in H$ tegyen eleget a

(2) $$\forall x \in M \ [\, x \in T \Leftrightarrow \neg (x \in \mathbf{B}(x)) \,]$$

követelménynek ($\Leftrightarrow$ az 'ekvivalencia' logikai műveletet, $\neg$ a 'negáció' logikai műveletet jelöli. A ’$\Leftrightarrow \neg$ ’ jelsorozat helyett a ’kizáró vagy’ ∇ jelet is használhatjuk.)

(*)

Az (1) feltétel miatt létezik $t = \mathbf{B}^{-1}(T)$, azaz

(3) $\exists t \in T \ [\mathbf{B}(t) = T]$.

A (2) és (3) kétszeri felhasználásával kapjuk:

(4) ha $[t \in T]$ akkor $[t \notin \mathbf{B}(t)]$ azaz $[t \notin T]$, és ha $[t \notin T]$ akkor $[t \in \mathbf{B}(t)]$ azaz $[t \in T]$.

Ez ellentmondás, amivel cáfoltuk a kiinduló (1) indirekt feltételezésünket. **QED**

Erre a 'Cantor levezetés' elnevezéssel fogok hivatkozni.

Meg fogom mutatni, hogy e levezetés a (*) –gal jelölt ponton túl nem folytatható. A hiba kimutatásának alapja megtalálható Ruzsa [1, p178] -ban, amikor arról beszél, hogy " ... bizonyos dolgok között egy kétváltozós F(a,b) reláció van adva oly módon, hogy ... minden d-re F(d,d) és F(d,s) közül pontosan az egyik teljesül, és … ez a speciális *s* elem is a számításba jöhető dolgok közé tartozik." Nézzük ezt részletesebben.

Definíció Legyenek $U \subseteq V$ tetszőleges nemüres halmazok, és legyen **R** az (U,V) páron értelmezett reláció (azaz egy $\mathbf{R}: U \times V \to \{\mathbf{h}, \mathbf{i}\}$ leképezés). Az **R** relációból származtatott diagonalizációs tulajdonságot a következőképp definiálom:

$$\mathbf{D}(v) \cong \forall x \in U \ [\mathbf{R}(x,x) \nabla \mathbf{R}(x,v)], \quad v \in V.$$

ahol '≅' a formulahelyettesítés metanyelvi jele, **i** az 'igaz', **h** a 'hamis' logikai érték jele.

Tétel (Diagonalizációs tétel) Legyen U=V, akkor az **R**-ből származtatott diagonalizációs tulajdonság kielégíthetetlen a V halmazon, azaz tetszőleges $v \in V$-re $D(v) = \mathbf{h}$.

Bizonyítás Legyen $e \in V$ tetszőleges rögzített elem. A $\Phi_e(x) \cong [\mathbf{R}(x,x) \nabla \mathbf{R}(x,e)]$ kifejezésben elvégezve az $x = e$ helyettesítést, a 'kizáró vagy' logikai művelet igazságtáblázata alapján kapjuk, hogy $\Phi_e(e) = \mathbf{h}$. Tehát létezik olyan $x \in V$, melyre $\Phi_e(x) = \mathbf{h}$, ezért hamis (**h**) az az állítás, hogy $\Phi_e(x)$ minden $x \in V$-re **i**, azaz $[\forall x \in V \ \Phi_e(x)] = \mathbf{h}$, azaz $\mathbf{D}(e) = \mathbf{h}$.

Mivel *e*-t tetszőlegesen választottuk, ezzel a tételt bebizonyítottuk. **QED**

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ez nem indirekt bizonyítás.

Alkalmazuk a diagonalizációs tételt a 'Cantor levezetés'-re.

Tétel_2 A Tétel_1 jelöléseivel, tegyük fel, hogy

(1') létezik $\mathbf{B}: M \to H$ bijektív leképezés,

akkor <u>nem</u> létezik a (2) követelménynek eleget tévő $T \in H$,
azaz nem létezik olyan $T \in H$, melyre

(2') $\forall x \in M \ [x \in T \ \nabla \ x \in \mathbf{B}(x)]$.

Bizonyítás Egyelőre használjunk ki annyit, hogy **B** injektív és jelöljük **B** képterét K -val, $K \subseteq H$.
Bevezetve a $X = \mathbf{B}(x)$ jelölést (ahol $x \in M$), (2) ezzel ekvivalens:

(5) $\forall X \in K \ [\mathbf{B}^{-1}(X) \in T \ \nabla \ \mathbf{B}^{-1}(X) \in X]$; $T \in H$.

Definiáljuk az **R**(X,Y) relációt így:

(6) $\mathbf{R}(X,Y) \cong [\mathbf{B}^{-1}(X) \in Y]; \quad X \in K, Y \in H.$

Ezt felhasználva (5) ezzel ekvivalens:

(7) $$\forall\ X\in K\ [\mathbf{R}(X,T)\ \nabla\ \mathbf{R}(X,X)];\quad T\in H.$$

Látható, hogy (7) nem más, mint a (6)-ban definiált **R** relációból származtatott **D**(T) diagonalizációs tulajdonság, és ez ekvivalens (2) –vel.

Az (1) feltétel azzal ekvivalens, hogy létezik olyan *injektív* **B**: M → H leképezés, mely egyben *szürjektív* is, azaz K=H. Ez megfelel a Diagonalizációs tétel U=V feltételének, így a Diagonalizációs tétel alkalmazásával kapjuk, hogy minden T∈H -ra **D**(T) = **h.**

Tehát (1) fennállásakor nem létezik a H hatványhalmaznak olyan T eleme, mely eleget tenne a (2) követelménynek. **QED**

Következmény A 'Cantor levezetés' a (*) ponton túl nem folytatható. A tankönyvek folytatják, így megsértik a (iii) korlátozási szabályt.

Ez a szemantikai értékrés esete (ld. Ruzsa[2, p100]). A T egy jel, van jelentése, de az adott feltételek mellett nincs jelölete (ld. Frege[3]). A jelenség a 0 -val való osztás tilalmával szemléltethető: az 1/0 művelet azért tilos, mert nem létezik olyan x szám, melyre x × 0 = 1. Bevezethetjük ugyan az c = 1/0 jelet, és ezek után formálisan még folytathatunk is egy levezetést, de az nyilvánvaló hiba.

Ennek a gondolatnak természetes általánosítása a jelölet nélküli T jel (*) ponton túli felhasználására vonatkozó tilalom.

Kapcsolat a Zermelo Fraenkel axiómarendszerrel

A részhalmaz axiómaséma a Wolfram honlap [8] szerint: tetszőleges M halmazra és tetszőleges rajta értelmezett A formulára

$$\exists T\ \forall x\ [x\in T\ \Leftrightarrow\ (x\in M\ \&\ A(x))].$$

Legyen most $A(x) \cong \neg(x \in \mathbf{B}(x))$ (ahol **B**: M → H tetszőleges leképezés, $H=2^M$), akkor előáll a következő konkrét

Axióma_1: Tetszőleges M halmaz és tetszőleges **B**: M → H leképezés esetén <u>létezik</u> az M –nek az a T részhalmaza, melyre

(**) $$\forall x\in M\ [x\in T\ \Leftrightarrow\ \neg(x\in\mathbf{B}(x))].$$

A (**) azonos a (2) követelménnyel. Mivel M részhalmazai egyúttal H elemei is (és fordítva), és a 'tetszőleges **B**' magában foglalja a 'bijektív **B**' -t, így az Axióma_1 feltételei magukban foglalják a Tétel_2 feltételeit. Tehát a részhalmaz axióma séma (ami valójában 'végtelen sok' axiómát takar) alapján egy olyan konkrét axiómát állítottunk elő, mely a Tétel_2 feltételei mellett pontosan az ellenkezőjét állítja a Tétel_2 konklúziójának. Ez ellentmondás, így ezzel a formális segédlettel a Cantor hatványhalmaz tétel valóban bizonyítható.

A részhalmaz axiómaséma a maga általánosságában meglehetősen önkényes: van ugyan véges tapasztalat az alátámasztására, de végtelenre való korlátlan általánosítását semmiféle tapasztalat nem támasztja alá. Itt egyfajta célszerűség dominál az okszerűség felett.

Ez viszont elgondolkoztató: levezettük, hogy az adott feltételek mellett a kérdéses T jelnek *nem létezik* jelölete. Ezek után kiderül, hogy e levezetéstől függetlenül, jó előre kimondatott egy formális axióma, ami kimondja: ugyanezen feltételek mellett *mégiscsak létezik* az a jelölet. Ennyi erővel akár magát a Cantor hatványhalmaz tételt is tekinthetnénk axiómának.

A halmazelmélet egy játék. Az első játékszabály: a fentieket nem szabad túl komolyan venni.

Hivatkozások

[1] Ruzsa Imre (1966) A matematika néhány filozófiai problémájáról in. Világnézeti nevelésünk természettudományos alapjai IV., Tankönyvkiadó, Budapest

[2] Ruzsa Imre (2000) *Logikai zsebenciklopédia*, Áron kiadó, Budapest

[3] Frege, Gottlob (1892) „Jel, jelentés, jelölet" in: *Logika, szemantika, matematika*, Gondolat, Budapest, 1980.

[4] Neumann János (1947) „A matematikus", in Ropolyi László (ed.) *Neumann János válogatott írásai*, Typotex, Budapest, 2005.

[5] Hilbert, D. (1926) „Über das Unendliche". *Mathematische Annalen 95* (In Putnam / Benacerraf 183-201)

[6] Wittgenstein, Ludvig; A.J.P.Kenny (trans.) (1974), *Philosophical Grammar*, Oxford

[7] Zenkin, A. A. (2000) „Mistake of Georg Cantor", *Voprosy Filosofii (Philosophy Problems)*, No. 2, 163-168.

[8] Wofram honlap a részhalmaz axiómáról: http://mathworld.wolfram.com/AxiomofSubsets.html

Kiegészítések: http://www.geier.hu/Ruzsakonf2009/Ruzsakonf.htm