Pléh, Kampis, Csányi (szerk.): Az észleléstől a nyelvig, GONDOLAT, Budapest, 2004

"Ha" - avagy a Gödel paradoxon érvényességének korlátai

Geier János

ELTE BTK Pszichológiai Intézet

janos@geier.hu

Bevezetés

Gödel nemteljességi tétele (én paradoxonnak nevezem, ki fog derülni, miért) mindenkit érdekel. Van benne valami misztikus, valami titokzatos, hiszen a róla szóló, sokszor szuperlatívuszokat zengő írások kimondott-kimondatlan sugallata szerint az ember alkotta matematikai rendszerek abszolút korlátairól szól - vagyis valahol az ember korlátairól. Van olyan szerző, aki szerint a tétel feltétel nélkül minden matematikai rendszerre érvényes, más szerint talán nem mindegyikre, de "minden valamire való axiómarendszer"-re, megint más, igényesebb megfogalmazás szerint "az aritmetikát tartalmazó" rendszerekre, stb.

A Gödel tétel reneszánszát éli. Az utóbbi években legalább négy-öt, magyarul (részben magyar, részben külföldi szerzőktől) megjelent, sikeres könyv foglalkozik vele, nem beszélve a 10-30 évvel ezelőttiekről. A kognitív tudomány művelői is gyakran hivatkoznak rá és a vele ekvivalens Turing-féle megállási tételre az elme-gép, agy-gép problémakör kapcsán. Az érvelés néha a következő formát ölti: az agy (ember, elme stb.) nem gép, hiszen a gépekre érvényes a Gödel tétel, ezért nem képesek minden kérdést eldönteni, míg az emberre ez a korlát nem áll fenn. (Pl. azért nem, mert képes megérteni magát a Gödel tételt.)

Azonban a Gödel tétel mindenekelőtt egy matematikai tétel, és így, mint minden más matematikai tétel, azzal kezdődik, hogy "Ha…". "Ha ez és ez fennáll, ha ezt és ezt megengedjük(!), akkor …". A hozzáférhető írásműveket elemezve ezzel szemben látható, hogy azok a tételt nagyon gyakran pontatlanul (a feltételeket elhagyják), megint máskor csak a dolog formális oldalát vázlatosan leírva (amiből az olvasó csak kínkeservvel ért meg félig-meddig valamit), esetleg 742 oldalon lelkendezve magyarázva (- de nem levezetve) ismertetik. A Gödel levezetés gondolati lényegét nehéz ezekből kihámozni, továbbá szerencsésnek kell lennünk ahhoz, hogy olyan könyv kerüljön a kezünkbe, melyben le is vannak írva a tétel érvényességének pontos feltételei.

Előadásomban a fentiek által motiváltatva a következők mellett fogok érvelni:

Gödel nemteljességi tétele (1) csak az olyan matematikai rendszerekre érvényes, melyek saját objektumként képesek kezelni saját formuláikat (ritka az ilyen), továbbá (2) a tétel egy olyan állítás eldönthetetlenségéről szól, ami valójában egy közönséges paradoxon. Ez a bizonyos 'eldönthetetlen állítás' nem egyéb, mint formalizált változata a 'hazug krétai', az 'önmagát borotváló vagy nem borotváló borbély' stb. paradoxonoknak. A Gödel tételben szereplő 'nem eldönthető állítás' egyszerűen azért nem dönthető el, mert eleve úgy lett megfogalmazva, hogy önmagának ellentmondjon. Abban pedig semmi csodálnivaló nincs, hogy egy önmagának ellentmondó, azaz logikai hibát tartalmazó állítás nem eldönthető. A Gödel tétel az ilyen 'patologiás állításokról' bizonyítja, hogy eldönthetetlenek - de ezt formalizálás nélkül is tudjuk. Viszont a tétel semmit sem mond az olyan rendszerekről, melyekben nem lehetséges (vagy nem megengedett) az említett típusú önhivatkozás. Amelyekben pedig megengedett, ott viszont semmit sem mond a nem önmagukkal ellentmondóra kreált, 'egészséges állítások' eldönthetetlenségéről!

Fentiek alátámasztása érdekében a Gödel tételt párhuzamba állítom a Richard paradoxonnal. Szándékom a Richard paradoxon pontos ismertetése, amitől a Gödel tétel gondolati alapja világossá válik.

További szándékom kétségeket kelteni a hallgatóban, és ezzel tovább gondolkodásra késztetni. A Richard paradoxon ugyanis könnyen megérthető, de máig feloldatlan. Az az tétel, aminek létezését a Gödel tétel kimondja, ennek formalizált változata. Ha az előbbit paradoxonnak nevezzük, miért nevezzük tételnek az utóbbit? Továbbá: ha az aritmetika tartalmazása elégséges feltétele a Gödel tételnek, vajon az aritmetikában megengedett a Richard-féle önhivatkozás? Végül röviden kitérek még a Turing megállási tételével való ekvivalenciára, és egy játékos példát mutatok arra, hogy bizony néha az ember sem több, mint Turing gép.

A Gödel tétel áttekintése

Mindenek előtt tisztáznunk kell, mit is mond ki a Gödel tétel. A különböző ismert megfogalmazások közül álljon most itt egy jellemző megfogalmazás.

Gödel nemteljességi tétele *(egy megfogalmazás a sok közül)*

- Gödel 1931-ben bizonyította be, hogy bizonyos feltételeknek eleget tévő axiómarendszerekben mindig található olyan állítás, amely nem következménye az axiómarendszernek, de az ellenkezője sem, amelyet tehát az axiómarendszeren belül sem bizonyítani, sem cáfolni nem lehet.
(Smullyan 1999, a magyar kiadó könyvismertetője)

Miért meglepő, miért érdekes ez az állítás? Főként talán azért, mert ez hangzik ki belőle: a matematika nem tökéletes. Hogyan van ez? A matematika, mint az egzaktság mintapéldája, a „tudományok királynője" betegségben szenved? Pont arra nem elégséges, amire létrehozták?

Mert gondoljuk csak meg, mire is való a matematika. Az e kérdésre adható sok lehetséges válasz közül hadd emeljek ki egyet: a világ modellezésére való. Természetesen nem a teljes világot akarjuk egyszerre átfogni, de egyes szeleteit igen. Például a geometria, a számelmélet, az algebra – és sorolhatnám – a világ egyes jelenségköreit modellezi megfelelő absztrakciós szinten. A matematika e szempontból tehát egy eszköz, amit bizonyos célok érdekében hoztunk létre – és erről derül ki, hogy nem tökéletes. Nem is az a fő baj, hogy jelen pillanatban nem tökéletes, hanem hogy a Gödel tétel szerint elvileg sem lehet azzá tenni.

Vegyünk egy hasonlatot. Ha az ember elmegy a boltba és vesz egy kávédarálót, azt azzal a céllal teszi, hogy otthon majd kávét daráljon vele. A gyártó a kávédarálóra "használatra alkalmassági garanciát" ad, azaz garantálja, hogy lehet majd vele kávét darálni. Azt, hogy vasszöget is lehet, nem garantálja, de hogy kávét, azt igen.

Ezzel szemben a Gödel tétel a formális axiómarendszerekről állít egy meglepő dolgot: noha a formális axiómarendszereket kimondottan abból a célból hozták létre, hogy az axiómákra alapozva be lehessen bizonyítani az axiómarendszer tételeit – most éppen az derül ki, hogy éppen erre a célra nem elégségesek az axiómarendszerek. A Gödel tétel azt állítja, hogy (bizonyos feltételeknek eleget tevő!) formális axiómarendszerekre nincs használatra alkalmassági garancia. Tényleg így van ez?

A kapaszkodót az a sokszor csak mellékesen elhangzó félmondat adja: „bizonyos feltételeknek eleget tévő" axiómarendszerekről van szó. Tehát nem mindegyikről! Eszerint a Gödel tétel talán nem is annyira általános érvényű, mint sokan hiszik és írásaikban sugallják?

Hadd fogalmazzam meg gondolataim végkicsengését már most, a klasszikus „Jereváni rádió”-vicc formájában:

A hír (a Gödel tétel) igaz, de
(1) nem minden axiómarendszerre, csak bizonyos nagyon speciálisakra, és
(2) azokon belül sem bármilyen típusú állításokra, csak az olyanokra, amelyek saját maguknak mondanak ellent.

A Gödel tétel különféle megfogalmazásai

Nézzük meg, mit mondanak különböző szerzők a Gödel tételről, mindegyikhez hozzá fűzve rövid véleményemet.

> *"Hogy keveset fognak az axiómarendszerek, azt Gödel meglepő felfedezése tárta fel: az, hogy minden valamirevaló axiómarendszernek, mely a számelmélet tartalmazza, vannak eldönthetetlen problémái."* (Péter (1963) 260. o.)

Megjegyzésem: A geometria, az algebra, a topológia, analízis, newtoni mechanika, a relativitáselmélet, a valószínűség számítás, stb. stb.: ezek "valamirevaló" rendszerek? Mert ezekre nincs bizonyítva, hogy érvényes lenne rájuk a Gödel tétel.

> *"Gödel tételét nem egészen szabatosan így fogalmazhatjuk meg: Ha egy axiómarendszer ellentmondástalan, továbbá bizonyos értelemben eléggé kifejező, akkor nem kategorikus. ... Az általános tétel bizonyítása, sőt már a tétel szabatos kimondása is (annak pontos körülhatárolása, hogy mit követelünk meg a kérdéses axiómarendszertől), az ebben a munkában ismertetett logikai apparátus mellett még egy sor mélyebb eszközt is felhasznál, ezért részletesen nem tárgyalhatjuk."* (Ruzsa és Urbán (1966) 504. o.)

Megjegyzésem: Ez az idézet korrekt módon felhívja a figyelmet arra, hogy a tétel szabatos kimondásához, a feltételek pontos megfogalmazásához mélyebb ismeretek szükségesek. Olyan mélyek, hogy ahhoz 500 oldal előkészítés sem elégséges.
Tehát: csak bizonyos nagyon szofisztikált feltételeknek eleget tevő axiómarendszerekre érvényes a Gödel tétel. Semmi esetre sem mindegyikre.

> *"Gödel tételének felismerésével a tudomány rájött, hogy akármilyen kereteket, axiómarendszereket alakít ki magának, mindig lesznek olyan igazságok, amelyek az adott kereteken belül nem bizonyíthatók be."* (Mérő 1989, 248.)

Megjegyzésem: Ez a mondat kétféleképp értelmezhető: tetszőleges állításról ("igazságról") avagy csak a rendszer keretein belül megfogalmazható állításról van szó?

Az első értelmezés esetén: Ezt Gödel előtt is tudta mindenki, hiszen pl. a geometria Euklidésztől származó (majd Hilbert által teljessé tett) axiómarendszerétől senki nem várta el soha, hogy belőle mondjuk a számelméleti tételek is levezethetők legyenek.

A második értelmezés esetén (vélhetően ez az értelmezés fejezi ki a szerző szándékát): A Gödel tétel az adott rendszer keretein *belül* megfogalmazható, ugyanakkor mégsem eldönthető állításokról szól. Ez viszont nem "akármilyen" keretekre, csak nagyon speciálisakra igaz. (ld. pl. a fenti Ruzsa Imre, Urbán János, vagy a Péter Rózsa idézetet.)

Tehát: egyik értelmezés szerint sem pontos az idézőjelbe tett iménti mondat.

> *"Mint azt Gödel tétele (1931) magának a logikának az eszközeivel megmutatta, egyetlen adott rendszerben sem lehet a rendszeren belül megfogalmazható összes igazságot levezetni."* (Mérő 1996, 50.)

Megjegyzésem: Ez már pontosabb, de itt sem igaz, hogy "egyetlen adott rendszerben sem", csak bizonyos speciálisakban: olyanokban, melyek saját objektumként képesek kezelni saját formuláikat. (Ld. szintén a többi idézetet, amelyek felhívják a figyelmet a speciális feltételekre.) A geometria, az algebra, a newtoni mechanika, a relativitáselmélet stb. axiómarendszerei közül egyik sem ilyen!

> "*Minden rendszerben vannak olyan értelmes kijelentések, amelyek nem vezethetőek le. Ez Gödel híres-neves tétele. Az benne a fontos a mi szempontunkból, hogy olyan állításokra, amire a logika nem tudja megadni a megfelelő levezetést (mert bizonyíthatóan nincs is ilyen levezetés), az ember képes választ adni.*" (Krajcsi, 1998, 10.)

Megjegyzésem: Ez mintha arról szólna, hogy az ember több, mint Turing gép. E kijelentésre az előadás végén még visszatérek.

> *"A számelmélet összes következetes axiomatikus megfogalmazása tartalmaz eldönthetetlen állításokat."* (Hofstadter, 1998, 17.)

Megjegyzésem: A megfogalmazás óvatos. Rejtve marad, hogy szigorú feltételek vannak.

> *"...1931-ben. Az osztrák matematikus és logista, Kurt Gödel ekkor bizonyította be merész tételét, miszerint léteznek olyan matematikai állítások, melyek hamis vagy igaz volta semmiféle módszeres eljárással nem állapítható meg."* (Davies 1992, 94.)

Megjegyzésem: Ez is egy nagyon általános megfogalmazás, többet enged sejtetni, mint amennyi a tényleges igazság.

Végül két érdekes tételre hívnám fel a figyelmet, melyek ugyan nem a Gödel tételről szólnak közvetlenül, de annak helyes értelmezésében sokat segíthetnek.

> *"Presburger és Skolem kimutatták, hogy ha az elemi aritmetikát úgy korlátozzuk, hogy elhagyjuk a szorzást és csak az összeadást tartjuk meg vagy fordítva, a kapott elméletben már lehetséges eldöntési eljárás."* (Quine, 1968, 286.)
>
> *"Ami sokkal meglepőbb, Tarski kimutatta, hogy a valós számok elemi algebrájában szintén lehetséges eldöntési eljárás."* (Quine, 1968, 286.)

Megjegyzésem: Láttunk tehát két tételt, mely olyan „valamirevaló” rendszerekről tanuskodik, ahol a Gödel-tétel nem érvényes.

Összefoglalás

A fentiek alapján elmondható, hogy az irodalmi hivatkozások jelentős része elfelejti közölni azt a lényeges tényt, miszerint a Gödel-tétel csak bizonyos szigorú feltételek fennállása esetén érvényes. A hivatkozások jelentős hányada nem kellően korrekt és kimerítő, ami a nem szakmabeli olvasót félrevezeti. Szerencsére a hivatkozások pontosabb változatai némiképp pótolják az említett hiányosságot.

A Gödel tétel bizonyításának alapötlete

Most nézzük meg, mit lehet megtudni a Gödel tétel bizonyításának alapötletéről. Ez fontos, hiszen a bizonyítás, a felhasznált alapötlet sokat elárulhat a tétel alkalmazhatóságáról, érvényességi köréről.

A bizonyítás alapötlete mások szerint

- "Gödel nem-teljességi tételének bizonyítása egy önmagára hivatkozó matematikai kifejezés felírásán alapul, hasonlóan az Epimenidész paradoxonhoz." (Hofstadter 1998)
- "Gödel saját bizonyítását a híres hazug-paradoxonhoz rokonítja, amelyben éppen egy krétai állítja, hogy valamennyi krétai hazudik." (Smullyan, 1999, 20.)

A bizonyítás alapötlete Gödel szerint (szabad fordításban):

- „Szembeötlő az analógia ezen eredmény és a Richard antinómia között; szintén közeli a rokonság a 'hazug' antinómiával." (Gödel, 1931, 2. fejezet)

Mint látjuk, a tételnek a 'hazug' antinómiával való hasonlóságát mindannyian említik, Gödel viszont a Richard-antinómiához való hasonlóságot említi első helyen. Teszi ezt nevezetes cikkének első fejezetében, ahol, mielőtt rátérne a szigorúan formális levezetésre, szóban ismerteti a levezetés fő gondolatmenetét.

Nézzük meg, mi is az a Richard paradoxon avagy antinómia.

Jules Richard, 1862-1956

- worked on Geometry but is best known for *Richard's paradox* involving the set of real numbers which can be defined in a finite number of words.

  Forrás: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Richard_Jules.html

A Richard paradoxon a Cantor-féle átlós eljárás egyfajta paródiájának tekinthető. Lényege, hogy a Cantor tétellel ellentétben nem az összes valós szám halmazáról tételezi fel kiindulásképp, hogy az ekvivalens a természetes számok halmazával, hanem csupán azokra a valós számokra hagyatkozik, melyek véges sok jellel megadhatók. Mivel maga a Cantor eljárás is véges sok jellel ad meg egy új valós számot, valódi antinómia keletkezik.

A Richard antinómia egy másik, a Gödel-tétellel szorosabb kapcsolatba hozható változatát a *Függelék* tartalmazza. Ez a megfogalmazás az, amelnek szembeötlő a hasonlatossága a Gödel-féle gondolatmenethez, amint azt Gödel eredeti cikkének ismeretében [5] mindenki megállapíthatja.

A Richard antinómia e második változata röviden a következő. Készítsük el a természetes számok összes tulajdonságának leírását, és tegyük e leírásokat abc rendbe, nevezzük ezeket „tulajdonságdefinícióknak.”. Ha véges ábécét használunk, akkor a tulajdonságdefiníciók számossága megszámlálhatóan végtelen lesz, azaz sorozatba rendezhetők.

Ezek után a Richard antinómia alapötlete:

- **Definíció_1**: Egy x természetes számot *Richard-szerű*nek nevezünk, ha az x -nek *nincs* meg az a tulajdonsága, amit a hozzá tartozó tulajdonság-defnció definiál. (Rövidebben: ha x-re nem érvényes az x sorszámú tulajdonságdefiníció.)
- Kérdés: az az r szám, amihez a **Definíció_1** tulajdonságdefiníció tartozik, *Richardszerű* vagy sem?

A kérdés nem eldönthető. (Az antinómia részletes elemzését ld. a függelékben.)

Állítsuk ezt párhuzamba azzal, amit Gödel 1931-es cikkének 1. fejezetében mond a saját gondolatmenetéről.

Eszerint Gödel $[\alpha; \mathbf{n}]$ –nel jelöli azt a formulát, melyet úgy kapunk, hogy valamely *egy* szabad v változót tartalmazó α formulában a szabad v változó helyére az $\mathbf{n}$ természetes számot helyettesítjük. Gödel sorba rendezi az összes, *egy* szabad v változót tartalmazó formulát, és $\mathbf{R}(n)$ -nel jelölve az n -ediket, definiálja a természetes számok egy $\mathbf{K}$ halmazát a következőképp:

$$n \in \mathbf{K} \quad \equiv \quad \sim(\mathbf{Bew}\,[\mathbf{R}(n);\, n])$$

ahol **Bew x** azt jelöli, hogy **x** egy bizonyítható formula. (itt ’≡’ az ’ekivivalencia’, ’~’ a ’negáció’ logikai műveleti jele)

Magyarul: egy n számot a **K** halmazba sorolunk (másszóval a ’**K** -tulajdonságúak közé tartozónak nevezünk’) akkor és csak akkor, ha az n-sorszámú **R** formulában a szabad v változó helyére n-et behelyettesítve az így nyert formula nem levezethető.

Kérdés: Az a q szám, melyhez a $\sim(\mathbf{Bew}\,[\mathbf{R}(v);\, v])$ formula tartozik, vajon **K**- tulajdonságú vagy sem? A kérdés nem eldönthető. (Helyettesítsük be v helyére a q-t!)

Gödel ezt a gondolamenet-vázlatot ülteti át cikkének további fejezeteiben a Principia Mathematica (PM) rendszer absztrakt formuláira. Ebben fellelhető egy lényeges momentum: az az állítás, hogy egy formula nem levezethető, a PM rendszerben maga is egy formulával azonosítható. Ez ad alapot az inverz önhivatkozás megfogalmazására, és így a fenti eldönthetetlen állítás megkonstruálására.

A Richard antinómia és a Gödel gondolatmenete közötti párhuzamot ezek után nyilvánvaló, aminek belátását a következő táblázat könnyít meg.

Richard antinómia	Gödel tétel fő gondolata
• A definíciók megfogalmazása élő nyelven	• A formulák felírása a PA rendszer formális jeleivel
• Tulajdonság-definíció	• Egy szabad *v* változót tartalmazó formula
• A *k* sorszámú tulajdonság-definíció *nem érvényes n* -re	• A *q* sorszámú formula *nem levezethető v =q* helyettesítés esetén

E párhuzam alapján most már elérkeztünk az előadás végére, amikor is kimondhatjuk annak fő mondanivalóját:

Gödel nemteljességi tétele

1. csak az olyan axiómarendszerekre érvényes, melyek saját objektumként képesek kezelni saját formuláikat; sok jelentős axiómarendszer nem ilyen;
2. a Gödel-tétel egy olyan állítás eldönthetetlenségéről szól, ami valójában egy közönséges paradoxon. A paradoxonok, mint tudjuk, eleve eldönthetetlenek. A Gödel-tétel viszont semmit sem mond a többi, nem paradoxonként megfogalmazott állítás eldönthetetlenségéről.

Végül röviden térjünk ki a Turing féle megállási tételre.

Turing megállási tétele

- „Nincs univerzális algoritmus annak eldöntésére, hogy egy Turing-gép megáll-e vagy sem.” (Penrose, 1993, 82.)
- „Az önmagára alkalmazhatóság felismerésének problémája nem oldható meg algoritmikusan.” (Trahtenbrot, 1978, 139)

A Turing tétel a Gödel tétel közeli rokona, absztrakt automatákra átfogalmazva. A kognitív tudomány művelői sokszor hivatkoznak rá, párhuzamba állítva az emberi értelemmel a gépi, algoritmikus folyamatokat. Annak demonstrálására, hogy néha az ember sem tud kikerülni bizonyos logikai körforgásból, hadd fejezzem be előadásomat Paul Daviestől (Davies, 1992) kölcsönvett ötlet alapján:

Egy (K.A. számára) eldönthetetlen, de mégis igaz állítás

- „*K. A. nem tudja bebizonyítani ennek a mondatnak az igazságát*.”

Gondoljuk csak meg: mi tudjuk, hogy nem tudja bebizonyítani, az állítás tehát igaz. K. A. viszont tényleg nem tudja bebizonyítani, hiszen ha bebizonyítaná, akkor épp az ellenkezőjét bizonyítaná annak, amit bizonyít…

Végszó

- A gödeli gondolat formalizált richardi gondolat.
- Ha a Richard-paradoxon paradoxon, akkor a Gödel-tétel miért tétel?

Függelék

A Richard paradoxon

Az alábbi logikai paradoxont avagy antinómiát Jules Richard francia matematikus 1903-ban készítette. (A Richard paradoxonnak más, ezzel ekvivalens megfogalmazása is létezik.)

Tegyük fel, hogy el szeretnénk készíteni a természetes számok *tulajdonságinak* egy listáját. Először készítsünk egy listát a tulajdonságokról - olyanokról, mint pl. páros, páratlan, 7 többszöröse, teljes négyzetszám, stb.

Ezután írjuk le e tulajdonságok definícióit magyar nyelven, hozzá véve a matematikai jelöléseket. Például az előző tulajdonságok definícióit a következőképp adhatjuk meg. (' ≡ ' rövidítése az 'akkor és csak akkor, ha' -nak. Az x, y stb. természetes számot fognak jelölni.)

1. Az x páros ≡ x maradék nélkül osztható 2-vel.
2. Az x 7 többszöröse ≡ x 7-tel osztható.
3. Az x páratlan ≡ x -et 2-vel osztva 1 a maradék.
4. Az x négyzetszám, ≡ van olyan y szám, melynek önmagával való szorzata egyenlő x-szel, azaz ha van olyan y, hogy x=y*y
5. Az x ikerprím első tagja ≡ x is és x+2 is prímszám
6. Az x ……
7. stb.

A definíciókat ennél "precízebben", formálisan is megadhattuk volna. (Pl. 3. $\equiv \exists y\ 2*y=x+1$)

Nevezzük e definíciókat *tulajdonságdefiníciónak*. Nyilvánvaló, hogy a tulajdonságdefiníciók nem mások, mint valamely rögzített ábécé (bele véve ebbe a matematikai jelöléseket is) segítségével mondjuk magyar nyelven megfogalmazott mondatok. Azaz egy tetszőleges tulajdonságdefiníció azonos egy véges ábécé karaktereiből alkotott véges hosszúságú karaktersorozattal.

Valamilyen szabály alapján rendezzük sorba az *összes* tulajdonságdefiníciót.

Legegyszerűbb módja ennek, hogy sorra vesszük a rögzített ábécénk véges hosszúságú *összes* karaktersorozatait (stringek), először az összes 1 hosszúságú, utána névsorba rakva az összes 2 hosszúságú, majd ugyancsak névsorba rendezve 3, 4, stb hosszúságú stringeket, és sorra véve csak azokat hagyjuk meg, melyek természetes számok tulajdonságát definiálják. A többi (értelmetlen, vagy nem természetes szám tulajdonságára vonatkozó) stringet kihagyjuk, és a sorszámozást összébb tömörítjük, hogy ne legyenek hézagok a sorszámozásban.

Ezáltal biztosak lehetünk abban, hogy minden tulajdonságdefiníció a fenti felsorolásban szerepelni fog, továbbá minden tulajdonságdefinícióhoz fog tartozni egy és csak egy természetes szám, az ő sorszáma. Természetesen más megoldás is elfogadható, csak az a fontos, hogy minden tulajdonságdefiníció kapjon egy egyértelmű sorszámot, és viszont: minden sorszámhoz tartozzon egyértelműen egy tulajdonságdefiníció.

Csak a magyarázat kedvéért vegyük úgy, hogy a teljes lista a fenti számozással kezdődik.

Ha most tekintünk egy tetszőleges természetes számot, mondjuk 142-t, akkor megállapíthatjuk, hogy rendelkezik-e mondjuk a 3. számú tulajdonsággal; azaz érvényes-e rá a 3. számú tulajdonságdefiníció. Erre a konkrét példára megállapíthatjuk, hogy nem érvényes rá, mivel a 3. definíció a 'páratlan' tulajdonságot definiálja, a 142 pedig nem páratlan.

Általában igaz, hogy tekintve egy tetszőleges i természetes számot és egy tetszőleges j sorszámú tulajdonságdefiníciót, mindig egyértelműen megállapítható, hogy az i természetes szám rendelkezik-e a j sorszámú tulajdonsággal. Mindig a két lehetőség egyike lesz igaz: vagy érvényes, vagy nem.

És most definiáljunk egy új tulajdonságot:

Definíció_1: Egy x Richardszerű ≡ az x sorszámú tulajdonságdefiníció nem érvényes x-re.

Csak a magyarázat kedvéért például, ha a fenti számozással kezdődne a teljes lista, akkor az 1 és a 2 természetes számok Richardszerűek lennének, a 3 és a 4, és az 5 természetes számok pedig nem. (Tessék meggondolni! Pl. a 4 természetes szám azért NEM Richardszerű, mert a 4 sorszámú definíció a négyzetszámokat definiálja, de a 4 maga is négyzetszám, tehát a 4-hez tartozó tulajdonság-definíció érvényes a 4-re. Hasonlóképp a fenti felsorolásban az 1 és a 2 egyaránt Richardszerű, a 3 és az 5 viszont nem, amint azt az olvasó egyszerűen maga is végiggondolhatja.)

Mivel a sorba rendezési módszerünk biztosította, hogy *minden* tulajdonságdefiníciónak van sorszáma, ezért a fenti **Definíció_1** -nak is kell, hogy legyen sorszáma, hiszen ez is egy egyértelműen eldönthető tulajdonságát definiálja a természetes számoknak. Jelöljük r- rel a **Definíció_1** sorszámát. (A fentiek alapján r biztosan létezik, de általunk nem feltétlenül ismert.)

Kérdés: r Richardszerű vagy sem?

A paradoxon nyilvánvaló:

Ha feltesszük, hogy r Richardszerű, akkor (a Richardszerű tulajdonság definíciója szerint) nem érvényes rá a hozzá rendelt tulajdonságdefiníció, tehát akkor nem igaz, hogy r Richardszerű.

Ha ellenben feltesszük, hogy r nem Richardszerű, akkor (a Richardszerű tulajdonság definíciója szerint) a hozzá rendelt tulajdonságdefiníció érvényes rá, tehát akkor mégis csak igaz, hogy r Richardszerű. (ugorj az elejére…)

Ez a Richard paradoxon: a kérdés nem dönthető el.

A Richard paradoxonra a mai napig nincs egyértelműen elfogadott feloldás, magyarázat, amit az is bizonyít, hogy elemzéséről szóló egészen friss cikkeket lehet találni. (pl. [2])

Ugyanakkor: ez a Gödel tétel gondolatmenete is.

Gödel nem tett mást, mint hogy a Richard paradoxon levezetését és gondolatmenetét a magyar (francia, német, angol…) nyelv helyett a Principia Mathematica formális nyelvén mondta el. Gödel a "tulajdonságdefiníció" helyett "egy szabad változót tartalmazó formulá"-t, az "érvényes rá" kifejezés helyett " levezethető" -t mond, és ezeket formalizálja.

Kérdés: Mi változik meg attól, hogy ugyanazt egyszer (korrekt, matematikai!) élő nyelven, másszor pedig formálisan mondjuk el?

Internet hivatkozások

[1] http://emmy.dartmouth.edu/~m5w00/fridiscussfolder/fridisc3/fridiscuss3.html

[1 tükre, mert az időközben megszűnt] http://www.geier.hu/GOEDEL/Richard-freediscuss/friday.html

[2] http://www.rpi.edu/~bestlj/COURSES/PARA/clune.rp.txt

[3] http://www.geier.hu

[4] http://www.miskatonic.org/godel.html (Last modified: Thu Jul 20 21:03:38 EDT 2000)

[5] Gödel, Kurt (1931) ON FORMALLY UNDECIDABLE PROPOSITIONS OF PRINCIPIA MATHEMATICA AND RELATED SYSTEMS, Vienna, http://www.ddc.net/ygg/etext/godel/index.htm

Hivatkozások

Davies, Paul (1992) *Isten gondolatai*, Budapest: Vince kiadó.

Hofstadter, D. R. (1998) *Gödel, Escher, Bach*. Budapest: Typotex kiadó

Krajcsi Attila (1998) *Logikai többértelműségek,* Szakdolgozat, ELTE, BTK, Pszichológia szak

Mérő László (1989) *Észjárások,* Budapest: Akadémiai kiadó

Mérő László (1996) *Mindenki másképp egyforma,* Budapest: Tericum

Penrose, R. (1993), *A császár új elméje*, Budapest: Akadémiai

Péter Rózsa (1963) *Játék a végtelennel*, Budapest: Gondolat

Trahtenbrot, B. A. (1978) *Algoritmusok és absztrakt automaták,* Budapest: Műszaki

Quine, W. O. (1968) *A logika módszerei,* Budapest: Akadémiai kiadó

Ruzsa Imre, Urbán János (1966) *A metematika néhány filozófiai problémájáról*, *Matematikai logika,* Budapest: Tankönyvkiadó

Smullyan, R. (1999) *Gödel nemteljességi tételei,* Budapest: Typotex