Vissza

Cantor hatványhalmaz tételének kritikája

V1.39

© Geier János, 2004.03.28.

Utolsó módosítás: 2008.11.11.

email: janos@geier.hu, http://www.geier.hu

Az alábbi gondolatmenet azt bizonyítja be, hogy a Cantor tétel szokásos, tankönyvi levezetése hibás.

Ha úgy gondolod, hogy Cantor tétel levezetése hibátlan, akkor keresd meg a hibát a cáfolat gondolatmenetében!

A Cantor tétel

Tétel: (Cantor hatványhalmaz tétele) *Tetszőleges nemüres* M *halmaz nem ekvivalens a* $H=2^M$ *hatványhalmazával.*

Bizonyítás: (a jól ismert tankönyvi verziók rekonstrukciója)

Tegyük fel indirekte, hogy M ekvivalens H-val, azaz, hogy

(1) létezik **B**: $M \to H$ bijektív leképezés.

Tekintsük a H hatványhalmaznak azt a T elemét, melynek pontosan azok az M halmazbeli x elemek elemei, melyekhez rendelt $\mathbf{B}(x)$ halmaz nem tartalmazza elemként x-et, azaz $T \in H$ tegyen eleget a

(2) $\forall x \in M \ [x \in T \Leftrightarrow \neg\, x \in \mathbf{B}(x)]$

követelménynek ($\Leftrightarrow$ az 'ekvivalencia' logikai műveletet, $\neg$ a 'negáció' logikai műveletet jelöli.)

Az (1) feltétel miatt létezik $t \in M$, melyre $\mathbf{B}(t) = T$, azaz

(3) $\exists\ t \in T\ [\mathbf{B}(t) = T]$.

A (2) és (3) kétszeri felhasználásával kapjuk:

(4) ha $[t \in T]$ akkor $[t \notin \mathbf{B}(t)]$ azaz $[t \notin T]$, és ha $[t \notin T]$ akkor $[t \in \mathbf{B}(t)]$ azaz $[t \in T]$.

Ez ellentmondás, amivel

(*) cáfoltuk a kiinduló (1) indirekt feltételezésünket.

QED.

Erre a továbbiakban 'Cantor levezetés' elnevezéssel hivatkozunk.

* * *

Állítás: Ez a levezetés hibás, nem bizonyítja a konklúziónak szánt állítást, azaz (1) tagadását.

A hiba lényege: nem bizonyított, hogy a (2) követelményt kielégítő T halmaz szükségképpen létezik. Sőt ennek fordítottja igaz: amikor a levezetés során eljutunk (2) -ig, már ott bizonyítható (anélkül, hogy hivatkoznánk a levezetés folytatására!), hogy az (1) feltétel fennállása mellett a (2) követelményt kielégítő $T \in H$ nem létezik. Emiatt a (3) és a (4) -ben lévő kifejezések értelmezhetetlenek, ezért a levezetésben nem lehet eljutni a (4) ellentmondás kimutatásáig.

A továbbiakban ezt a megállapítást fogom részletesen indokolni. Mivel a fenti Cantor levezetés nem hivatkozik explicite semmiféle axiómarendszerre, csupán csak a józan matematikai érvelési stílust alkalmazza (jelen cikk szerint egy "apró" kis hibával), ugyanígy fogok én is eljárni (de hiba nélkül).

* * *

A diagonalizáció fogalmának pontosítása

A pontosítás érdekében mindenek előtt két alapvető, ismert fogalmat *idézek*: tulajdonság, reláció, összhangban azok általánosan elfogadott definícióival. (Ezekben tehát semmi újat nem szándékozok mondani, csak ide idézem azokat, hogy kéznél legyenek.)

Def_1: A-n értelmezett *tulajdonságoknak* nevezzük a **P**: $A \rightarrow \{\mathbf{h}, \mathbf{i}\}$ leképezéseket, ahol A tetszőleges nemüres halmazt jelöl, **h** ill. **i** a logikai hamisság ill. igazság jele.

Az A-n értelmezett **P** tulajdonság *igazsághalmazának* nevezzük azt az $I_P \subseteq A$ halmazt, melynek pontosan azok a $x \in A$ -k az elemei, melyekre $\mathbf{P}(x) = \mathbf{i}$.

Azt mondjuk, hogy az A *halmazon* értelmezett **P** *tulajdonság kielégíthetetlen*, ha $I_P = \emptyset$; egyébként azt, hogy *kielégíthető.*

Megjegyzés_1: Absztrakt tárgyalásmódnál *tulajdonság* alatt az A alaphalmaz valamely részhalmazát *is* szokták érteni. Ez az halmaz alapú tulajdonságfogalom a *Def_1* szerinti tulajdonságfogalomhoz az indikátorfüggvény (más elnevezés szerint karakterisztikus függvény) fogalmán keresztül kapcsolódik. Ha $P \subseteq A$ (halmaz alapú tulajdonság), akkor definiáljuk a P halmaz **P** indikátorfüggvényét a következőképp: tetszőleges $x \in U$ -ra $\mathbf{P}(x)=\mathbf{i},$ ha $x \in A$, egyébként $\mathbf{P}(x)=\mathbf{h}.$ Ezzel a *Def_1* szerinti **P** -hez jutottunk. Fordítva: adott, *Def_1* szerinti **P** tulajdonság esetén az I_P igazsághalmaz felel meg a P halmaznak.
Az egyszerű szóhasználat kedvéért a **P** leképezést is és a neki megfelelő P halmazt is (azaz az I_P igazsághalmazt is), egyöntetűen *tulajdonságnak* nevezzük. (Részletekbe menő szóhasználat esetén be kellene vezetnünk egy absztrakt **P** tulajdonságfogalmat, amit egyszer "P halmazzal definiált tulajdonságnak", másszor "**P** leképezéssel definált tulajdonságnak" nevezhetnénk. Ez itt azonban felesleges szószaporítás lenne, csak a szöveget tenné körülményesebbé.)

Def_2: *Az* (A,B) *rendezett páron értelmezett relációknak* nevezzük az $A \times B$ halmazon értelmezett tulajdonságokat, ahol A és B tetszőleges nem üres halmaz.

Megjegyzés_2: A reláció fogalmát szokás még az $A \times B$ halmaz részhalmazaként is definiálni. A kétféle definíció közti kapcsolatot az indikátorfüggvény fogalma adja, ld. *Megjegyzés_1*. Fordított tárgyalás is lehetséges lenne: tulajdonság = egyváltozós (egy argumentumú) reláció. Itt nem ezt használjuk.

Megjegyzés_3: A tulajdonság és a reláció fenti definíciója teljes összhangban van azok általánosan elfogadott definíciójával. Ezt a Wikipediából vett idézetek is alátámasztják:

(http://en.wikipedia.org/wiki/Property_(philosophy) 2008.11.08.-i állapot.)
In mathematical terminology, a property *p* defined for all elements of a set *X* is usually defined as a function $p: X \rightarrow \{\text{true, false}\}$, that is true whenever the property holds; or equivalently, as the subset of *X* for which *p* holds; i.e. the set $\{x | p(x) = \text{true}\}$; *p* is its indicator function

(http://en.wikipedia.org/wiki/Unary_relation 2008.11.08.-i állapot.)
In mathematics, especially set theory, and logic, a **relation** is a property that assigns truth values to combinations (k-tuples) of *k* individuals.

A további definíciókban és tételekben egységesen használom a következő jelöléseket:

Jelölések:

U,V $\neq \varnothing$ nemüres halmazok, melyekre U $\subseteq$ V.

R: U×V $\rightarrow$ {**h**,**i**} az (U,V) páron értelmezett reláció.

Def_3: Az **R** *relációból származtatott diagonalizációs formulát* a következőképp definiálom:

$$\mathbf{D}(v;\ \mathbf{R}) \cong \ \forall u \in \mathrm{U}\ [\mathbf{R}(u,v)\ \nabla\ \mathbf{R}(u,u)];\quad v \in \mathrm{V}.$$

(Itt '∇' a 'kizáró vagy' logikai művelet jele, '$\cong$' a formulahelyettesítés metanyelvi jele.)

Ha nyilvánvaló, hogy mely **R** -ről van szó, akkor a könnyebb olvashatóság kedvéért egyszerűen **D**(v)-t írok, és ezt egyszerűen csak *diagonalizációs formulának* nevezem.

Megjegyzés_4: A (logikai) formula fogalmának leírása megtalálható pl. itt: planetmath_ formula

Megjegyzés_5: A diagonalizációs formulát az 'ekvivalencia' művelettel is kifejezhetjük, a következő formula azonos a diagonalizációs formulával:

$$\forall u \in \mathrm{U}\ [\mathbf{R}(u,v) \Leftrightarrow \neg\ \mathbf{R}(u,u)].$$

Mivel tetszőlegesen $u \in$ U esetén **R**(u,v) minden $v \in$ V -re értelmezett, ezért nyilvánvaló, hogy **D** a V halmazon értelmezett tulajdonság. Ennek alapján a továbbiakban a **D**-t *diagonalizációs tulajdonságnak* (is) fogom nevezni.

Tétel_1 (Diagonalizációs tétel): *Ha* U=V*, akkor a* **D** *diagonalizációs tulajdonság kielégíthetetlen.*

Bizonyítás:

Legyen $e \in$ V tetszőleges rögzített elem.

A $\mathbf{\Phi}_e(u) \cong\ [\mathbf{R}(u,e)\ \nabla\ \mathbf{R}(u,u)]$ kifejezésben elvégezve a $u \leftarrow e$ helyettesítést, a 'kizáró vagy' logikai művelet igazságtáblázata alapján kapjuk, hogy

$$\mathbf{\Phi}_e(e) = \mathbf{h}.$$

Tehát létezik olyan $x \in$ V, melyre $\mathbf{\Phi}_e(x)$ hamis, azaz

$$\exists x \in \mathrm{V}\ [\neg\ \mathbf{\Phi}_e(x)],$$

ezért hamis az az állítás, hogy $\mathbf{\Phi}_e(x)$ minden $x \in$ V-re igaz, azaz

$$\forall x \in \mathrm{V}\ \mathbf{\Phi}_e(x) = \mathbf{h},$$

azaz

$$\mathbf{D}(e) = \mathbf{h}.$$

Mivel e-t tetszőlegesen választottuk, ezzel a tételt bebizonyítottuk. QED.

Megjegyzés_5: Vegyük észre, hogy a Diagonalizációs tétel iménti bizonyítása <u>nem</u> indirekt bizonyítás.

Alkalmazzuk a Diagonalizációs tételt a Cantor levezetésre.

Tétel_2: *Ha* (1) *fennáll, akkor* <u>*nem*</u> *létezik a* (2) *követelménynek eleget tévő* $T \in H$.

Bizonyítás: Először is vegyük észre, hogy *injektív* **B**: $M \to H$ leképezés minden további feltétel nélkül, pusztán a H hatványhalmaz definíciójából kifolyólag létezik. (Ilyen pl. az a leképezés, amely tetszőleges $m \in M$ -hez az egyelemű $\{m\} \in H$ -t rendeli.)

Legyen **B**: $M \to H$ egy injektív leképezés, és

jelöljük **B** képhalmazát K -val,

nyilván $K \subseteq H$.

Jelöljük x-szel az M tetszőleges elemét és X -szel az x-hez rendelt $X = \mathbf{B}(x)$ halmazt, ahol tehát $X \in K$.

B invertálhatósága következtében $x = \mathbf{B}^{-1}(X)$. Ezt behelyettesítve (2)-be kapjuk, hogy

(5) $\forall X \in K\ [\mathbf{B}^{-1}(X) \in T \Leftrightarrow \neg\, \mathbf{B}^{-1}(X) \in X];\quad T \in H.$

Az (5) ekvivalens a (2) -vel, hiszen csak formula helyettesítés történt.

Definiáljuk az **R**(X,Y) relációt a következőképp:

(6) $\mathbf{R}(X,Y) \cong [\mathbf{B}^{-1}(X) \in Y];\quad X \in K,\ Y \in H.$

Ezt behelyettesítve (5) be, kapjuk:

(7) $\forall X \in K\ [\mathbf{R}(X,T)\ \nabla\ \mathbf{R}(X,X)];\quad T \in H.$

Itt is csak formulahelyettesítés történt, ezért (7) ekvivalens (5) tel, előbbiek miatt tehát (7) ekvivalens (2) -vel.

Látható, hogy (7) nem más, mint a (6)-ban definiált **R** relációból származtatott **D**(T) diagonalizációs tulajdonság. Tehát a Cantor levezetésben lévő, $T \in H$ -ra vonatkozó (2) követelmény ekvivalens a (6) -ban definiált **R** relációból származtatott **D**(T) diagonalizációs tulajdonsággal.

Az (1) feltétel azzal ekvivalens, hogy létezik olyan *injektív* **B**: $M \to H$ leképezés, mely egyben *szürjektív* is, azaz K=H. Ez megfelel a Diagonalizációs tétel U=V feltételének, így a Diagonalizációs tétel alkalmazásával kapjuk, hogy minden $T \in H$ -ra **D**(T) = **h.**

Tehát ha (1) fennáll, akkor nem létezik a H hatványhalmaznak olyan T eleme, mely kielégíti **D**(T) -t. Azaz (1) fennállásakor nem létezik a (2) követelménynek eleget tévő $T \in H$. QED.

Megjegyzés_7: Vegyük észre, hogy a Tétel_2 iménti bizonyítása <u>nem</u> indirekt bizonyítás; annak ellenére nem az, hogy a Cantor tétel (mint "főtétel") bizonyításra váró konklúziójának tagadására épül. A Tétel_2 felfogható egy lemmának, melynek premisszái egybe esnek a Cantor levezetés kiinduló feltételeivel, köztük az indirekt (1) feltétellel. De ettől még a Tétel_2 fenti bizonyítása nem válik indirektté. hiszen a Tétel_2 számára (1) egy "közönséges" (azaz nem indirekt) feltétel, azaz a tétel premisszája.

Cáfolat - a Cantor levezetés pontosítása

A *Tétel_2* figyelembe vételével, ha most újra végignézzük a Cantor levezetést, akkor észre kell vennünk a következőt:

Mivel az (1) feltétel mellett a (2) követelménynek eleget tévő, T-vel jelölt halmaz nem létezik, emiatt a Cantor levezetés korrekt módon nem folytatható tovább a (2) formula után; azon a ponton a levezetés 'elakad'.

Részletesebben: a (3) és a (4) sorban lévő formulák tartalmazzák a T szimbólumot, azonban a *Tétel_2* kimondta, hogy (1) fennállásakor a (2) követelményt kielégítő $T \in H$ nem létezik. (Azaz olyan objektum, amit a T jelölne, nem létezik; a T jelnek nincs *jelölete.* A *jel-jelentés-jelölet* fogalmával kapcsolatban ld. Frege vonatkozó munkáját.)

A (3) és a (4) sorban lévő formulákban tehát T egy üres szimbólum, nem jelöl semmit, így ezek a formulák semmiről sem állítanak semmit. Ezáltal a Cantor levezetés nem folytatható a (2) ponton túl, ami azt eredményezi, hogy nem is sikerül kimutatni a (*) ellentmondást.

Diszkusszió: Az, hogy a (2) -nél 'elakad' a levezetés, ugyanazon a gondolaton nyugszik, mint pl. a 0 -val való osztás tilalma. Ha egy levezetésben - legyen szó *akár direkt, akár indirekt* bizonyításról - olyan ponthoz érünk, ahol 0 -val való osztás szerepel, ott azt nyilván nem lehet tovább folytatni; akkor sem, ha ez a 0 -val való osztás rejtett módon zajlik. (Pl. (a-b) -vel osztunk, miközben nem vesszük figyelembe, hogy adott esetben a=b, több ilyen játékos beugratás található elemi könyvekben.).

A 0 -val való osztás tilalma a "nemlétezésen" alapul: az 1/0 művelet azért tilos, mert nem létezik olyan x szám, melyre $x \times 0 = 1$. Bevezethetjük ugyan az $x = 1/0$ jelet, és ezek után formálisan még folytathatjuk is a levezetést, de az nyilvánvaló hiba.

Ennek a gondolatnak természetes általánosítása a nemlétező T halmaz (2) ponton túli felhasználására vonatkozó tilalom.

Itt a 'nemlétező T halmaz' kifejezés úgy értendő, hogy az (1) feltétel mellett nem létezik a (2) követelményt kielégítő halmaz - amint azt a Tétel_2 kimondja. Az pedig, hogy az (1) feltétel mellett a (2) követelménynek eleget tévő T nem létezik, ***nem ellentmondás***, hanem egy levezetett tétel. Ezt a tételt közvetlenül a (2) kimondása után le lehet vezetni a kiinduló feltételekből, és így ez az oka annak, hogy *a levezetést nem lehet tovább folytatni e ponton túl.*

Ezzel az elvvel sokszor találkozhatunk matematikai levezetésekben. A levezetés során definiálunk egy új fogalmat oly módon, hogy a definiálandó dologra megfogalmazunk egy követelményt, és mielőtt tovább lépnénk, fel kell tenni a *kérdést: egyáltalán kielégíthető ez a követelmény a kiinduló feltételeink mellett?* ***Természetes korlátozás***: ha a válasz nemleges - és ez már a levezetésnek ezen a pontján, a folytatástól függetlenül bizonyítható -, akkor nem mehetünk tovább. Ezt a matematikai gyakorlatban be is szokás tartani. (Teljesen bizonyos, hogy ezen elv megsértésével nem lehetne matematika versenyt nyerni.)

Ez az elv független attól, hogy "direkt" vagy indirekt bizonyításról van-e szó: indirekt bizonyítás során sem szabad nullával osztani. Direkt bizonyítás során *igaznak tekintjük* a kiinduló feltételeket (ezek ekkor azonosak a bizonyítandó tétel premisszáival, ezek igazsága "szent és sérthetetlen" a levezetés során) és eljutunk a bizonyítandó konklúzióhoz - itt van vége a bizonyításnak. Indirekt bizonyítás során a bizonyítandó tétel konklúziójának tagadását is bevesszük a kiinduló feltételek közé és a többi mellett ez is szent és sérthetetlen a levezetés során mindaddig, amíg abszurdumra nem jutunk - itt van vége az indirekt bizonyításnak. (Valójában még van ezután egy lépés, amiben visszatérünk az eredeti tételhez, de ez a mondanivalóm szempontjából irreleváns.)

Akár direkt, akár indirekt bizonyításról van is szó, amíg annak nincs vége, addig *pontosan ugyanazok az elvek érvényesek* - így többek között a fent említett természetes korlátozás is érvényes mindkettőre. A cáfolat gondolatmenetében mindezeket az elveket maradéktalanul betartottuk.

Fontos megjegyezni: Noha (1) a Cantor levezetés szempontjából *indirekt* feltétel, ellenben a Tétel_2 szempontjából ez egy közönséges (azaz nem indirekt) feltétel. Más szóval: (1) a Tétel_2 egyik premisszája (ld. még *Megjegyzés_7*).

Felmerül a gondolat, hogy - ha már egyszer a (2) után nem folytatható a levezetés - talán elég lenne ezen a (2) ponton kimutatni egy ellentmondást. Ehhez viszont azt kéne bebizonyítani, hogy ilyen T mégiscsak létezik; azaz létezik olyan T, mely az (1) feltétel mellett eleget tesz a (2) követelménynek.

Azonban vegyük észre: a keresett T -re semmi más támpontunk nincs, mint (1) és (2). Nem akármilyen T-t keresünk, hanem épp olyat, ami eleget tesz (2) követelménynek az (1) feltétel fennállása mellett. Mindkét támpontot kihasználtuk annak bizonyítására, hogy ilyen T nem létezik. Ezek után lehetetlen elképzelni olyan levezetést, mely ugyanezen két támpont alapján mégiscsak kimutatja ilyen T létezését. Ne feledd: a keresett T-re semmi más támpontod nincs, mint (1) és (2)! Vagy van?

Végkövetkeztetés: Cantor hatványhalmaz tételének ismert bizonyítása semmiképp sem teszi *szükségszerűvé* – csupáncsak *lehetővé* – hogy a hatványhalmaz számossága nagyobb legyen az alaphalmaz számosságánál.

Ahogyan azt sem lehet bebizonyítani, hogy (-1)*(-1) = (+1), ugyanúgy ezt sem lehet bizonyítani, hogy a valós számok halmaza nagyobb a természetes számok halmazánál. Mindkét állítás megállapodás kérdése, bizonyos célok érdekében.

A matematikai objektumok nem valóságos létezők, csupáncsak egy ember alkotta *virtuális* valóság elemei. Ha valaki mindenáron ragaszkodik ahhoz, hogy a valós számok halmazát, mint "aktuálisan végtelen halmazt", létezőnek tekintse, és egyfajta "darabszámal", azaz számossággal akarja azt felruházni, akkor természetesen összeállíthat egy önkényes (koncepciós) axiómarendszert és erre felépíthet egy transzfinit halmazelméletet a végesen túli rendszámok mesterséges bevezetésével ..... de minek? (Állítólag Neumann János egyszer azt mondta: egy szelet csokoládéért szívesen megcsinálja a halmazelmélet axiómarendszerét. Lehet, hogy valaki adott neki egy szelet csokit?)

Felhívás: Ha úgy gondolod, hogy Cantor tétel mégiscsak szükségképpen igaz, és a valós számok halmaza szükségszerűen - nemcsak lehetőség szerint - nagyobb számosságú, mint a természetes számoké, akkor keresd meg a hibát a cáfolat gondolatmenetében!

Ehhez, kérlek, vedd figyelembe a következőket. Ha egy matematikai gondolatmenet minden lépése hibátlan, akkor hibátlan a gondolatmenet. Ha be akarod bizonyítani, hogy a gondolatmenet hibás, ahhoz - indoklással egybekötve - rá kell mutatnod legalább egy konkrét lépésre, ami szerinted hibás. A konkrétumot mellőző, sommás vélemény-nyilvánítás semmire nem vezet.

Ja, és még valamit: vedd könnyedén, ez talán csak egy beugrató játék. (De ettől még komoly.. Kérem a tábla csokit!)

Kapcsolódó linkek (2008.11.08-i állapot szerint ezek létező linkek)

Tulajdonság: http://en.wikipedia.org/wiki/Property_(philosophy)

Reláció: http://en.wikipedia.org/wiki/Unary_relation
http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_relation

Részhalmaz axióma: http://en.wikipedia.org/wiki/Subset_axiom

Elsőrendű logika (szimbólum, term, formula):
http://planetmath.org/encyclopedia/Formula.html

Ellenvélemények Cantorral szemben: http://en.wikipedia.org/wiki/Controversy_over_Cantor%27s_theory

Utóbbiban figyelmedbe ajánlom - többek között - a következő szövegrészt:

"No one will drive us from the paradise which Cantor created for us" (Hilbert, 1926). To which Wittgenstein replied "if one person can see it as a paradise of mathematicians, why should not another see it as a joke? (Irodalmi hivatkozások a nevezett linken.)

* * *

Vissza